E.N.S.I. DE PHYSIQUE & DE MECANIQUE 1983

Programme M **DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES** (4 h)

Une utilisation de résultats du I et du II permet d'éviter des calculs compliqués dans certaines questions du IV.

Des bonifications pourront être attribuées aux candidats pour chaque partie du problème traitée à fond, mais des pénalités pourront être infligées aux candidats qui accumulent les raisonnements faux ou les réponses fantaisistes.

On note $\mathcal{M}_3(R)$ l'ensemble des matrices carrées à 3 lignes et 3 colonnes et à coefficients réels.

La notation R^3 désigne l'espace vectoriel R^3 usuel. On utilisera la notation $\vec{X} = (x, y, z)$ pour les éléments de R^3, et X désignera la matrice colonne $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ formée des coordonnées de $\vec{X}$ dans la base canonique :

$$\mathcal{B}_0 = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) \text{ où } \vec{e_1} = (1, 0, 0),\ \vec{e_2} = (0, 1, 0),\ \vec{e_3} = (0, 0, 1).$$

L'ensemble des applications linéaires de R^3 dans lui-même est noté $\mathcal{L}(R^3)$.

Par droite affine ou plan affine de R^3 on entend une droite ou un plan affine de l'espace affine canoniquement associé à R^3.

I

Si $M \in \mathcal{M}_3(R)$ on note $\hat{M}$ l'élément de $\mathcal{L}(R^3)$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}_0$ coïncide avec M.

Soit ψ la forme quadratique définie par la formule :

$$\forall \vec{X} \quad (x, y, z) \in R^3, \quad \psi(\vec{X}) = x^2 + y^2 - z^2$$

1° *a.* Donner la forme bilinéaire symétrique φ telle que $\psi(\vec{X}) = \varphi(\vec{X}, \vec{X})$ pour tout $\vec{X} \in R^3$.

b. La forme bilinéaire symétrique φ est-elle non dégénérée?

c. Donner la matrice A de la forme φ dans la base $\mathcal{B}_0$.

2° On pose $G = \{ M \in \mathcal{M}_3(R) \text{ tels que } \forall \vec{X} \in R^3,\ \psi\left(\hat{M}(\vec{X})\right) = \psi(\vec{X}) \}$

Montrer que $M \in G$ si et seulement si $\forall \vec{X} \in R^3,\ \forall \vec{Y} \in R^3,\ \varphi\left(\hat{M}(\vec{X}), \hat{M}(\vec{Y})\right) = \varphi(\vec{X}, \vec{Y})$.

3° Caractériser les éléments de G par une relation matricielle simple faisant intervenir la matrice A introduite au 1°.

4° Quelles sont les valeurs possibles pour $\det M$ si $M \in G$?

Donner un exemple correspondant à chaque valeur.

5° Vérifier que G est stable par produit et qu'il forme un groupe si on le munit du produit des matrices.

6° Soit θ un réel. Trouver tous les éléments M de G tels que

$$\hat{M}(\vec{e_1}) = \operatorname{ch}\theta \vec{e_1} + \operatorname{sh}\theta \vec{e_3}$$
$$\hat{M}(\vec{e_2}) = \vec{e_2}$$

7° Vérifier que si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est une matrice carrée réelle orthogonale d'ordre 2, alors $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ appartient à G.

8° Soient θ et u deux réels. Trouver un élément N de G tel que $\hat{N}(\vec{e_1}) = \operatorname{ch}\theta \cos u.\vec{e_1} + \operatorname{ch}\theta \sin u.\vec{e_2} + \operatorname{sh}\theta.\vec{e_3}$.

Les candidats pourront dans la suite du problème admettre l'existence d'une telle matrice N même s'ils n'ont pu la calculer effectivement.

II

Les notations sont les mêmes qu'au I.

1° Soit S un sous-espace vectoriel de R^3. On pose $S^\perp = \{ \vec{Y} \in R^3 \text{ tels que } \forall \vec{X} \in S,\ \varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = 0 \}$

a. Comparer S et $(S^\perp)^\perp$. Donner $\{0\}^\perp$ et $(R^3)^\perp$

.../...

b. On suppose S engendré par un vecteur non nul $\vec{X}_0$.

Discuter selon la valeur de $\vec{X}_0$ la dimension de $S \cap S^\perp$ et de $S + S^\perp$.

Donner la valeur de dim S + dim $S^\perp$.

2° On pose

$$G_1 = \{ M \in G \text{ tels que } \hat{M}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \}$$

$$\text{et } H = \{ \vec{Y} \in R^3 \text{ tels que } \varphi(\vec{e}_1, \vec{Y}) = 0 \}.$$

[On rappelle que $\vec{e}_1$ est le vecteur (1 , 0 , 0)]

Montrer que $\hat{M}(\vec{Y}) \in H$ pour tout élément $\vec{Y}$ de H et pour tout élément M de G_1.

3° On note $\mathfrak{I} = \{ \vec{X} \in R^3 \text{ tels que } \psi(\vec{X}) = 0 \}$ l'ensemble des vecteurs isotropes de ψ.
Décrire $\mathfrak{I} \cap H$.

4° On pose $\vec{f}_2 = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Montrer que $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est une base de R^3, donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$ et calculer P^{-1}.

5° Montrer que $M \in G_1$ si et seulement si $P^{-1} M P$ a l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha \end{bmatrix} \text{ avec } \alpha \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1/\beta & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \beta \neq 0$$

6° Montrer que tout élément M de G_1 est diagonalisable sur R^3 et donner dans chaque cas les valeurs propres de M et une base de R^3 formée de vecteurs propres de $\hat{M}$.

7° On pose $\mathfrak{S} = \{ \vec{X} \in R^3 \text{ tels que } \psi(\vec{X}) = 1 \}$.

Si $\vec{X} = (x, y, z) \in \mathfrak{S}$ on note V_X l'ensemble des éléments $\vec{X}' = (x', y', z')$ de $\mathfrak{S}$ vérifiant $x' = x$.

a. Donner l'équation cartésienne de $\mathfrak{S}$ dans R^3 considéré comme espace affine rapporté au repère affine $(\vec{0}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

b. Vérifier que (pour la structure euclidienne usuelle de R^3) $\mathfrak{S}$ est une surface de révolution dont on précisera l'axe. Quelle est la nature géométrique de $\mathfrak{S}$ et de ses méridiennes?

c. Dessiner la projection orthogonale (au sens usuel) de V_X sur H en distinguant différents cas selon la valeur de x.

8° Soit $\vec{X} = (x, y, z)$ un élément de $\mathfrak{S}$.

On note $U_X = \{ \hat{M}(\vec{X}) \}_{M \in G_1}$ l'orbite de $\vec{X}$ sous l'action de G_1. Montrer que si $|x| \neq 1$ alors $U_X = V_X$.

Montrer plus précisément que si $\vec{X}' \in V_X$ il existe exactement deux éléments M de G_1 vérifiant $\hat{M}(\vec{X}) = \vec{X}'$.

9° Que se passe-t-il si $|x| = 1$?

III

Dans toute cette partie III indépendante des précédentes, on désigne par Γ l'arc affine paramétré de R^3 trajectoire de $P(t) = \vec{X}_0 + t\vec{X}_1 + t^2 \vec{X}_2$ où $(\vec{X}_0, \vec{X}_1, \vec{X}_2)$ est un triplet donné de vecteurs de R^3 tels que $(\vec{X}_1, \vec{X}_2) \neq (\vec{0}, \vec{0})$ et où le paramètre t décrit R.

1° Montrer que la courbe Γ est une courbe plane.

2° On suppose que le rang de $(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$ est égal à 1. Quelle est la nature de Γ?

3° On suppose que le rang de $(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$ est égal à 2.
Montrer que Γ est une parabole. Pour cela on pourra chercher l'équation cartésienne de Γ dans un repère affine orthonormé (au sens de la structure euclidienne usuelle) dont l'origine est l'unique point de Γ où la tangente est orthogonale à $\vec{X}_2$.

IV

De même qu'au II, on note $\mathcal{S}$ la surface affine de R^3 d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ dans le repère affine $\mathcal{R}_0 = (\vec{O}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

1° *a.* Montrer que l'application $\omega : (u, \theta) \to (\cos u \operatorname{ch} \theta, \sin u \operatorname{ch} \theta, \operatorname{sh} \theta)$ définit une surjection de R^2 sur $\mathcal{S}$.

b. Soient u_0 et θ_0 deux réels. Quelle est la nature des courbes paramétrées $u \to \omega(u, \theta_0)$ et $\theta \to \omega(u_0, \theta)$?

2° Soit $\vec{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un élément de R^3.

On note D_{X_0} la différentielle de ψ en X_0.

Donner la valeur de $D_{X_0}(\vec{Y})$ pour tout élément $\vec{Y} = (h, k, l)$ de R^3.

3° Soit $\vec{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un élément de $\mathcal{S}$. On note $\mathcal{P}_{\vec{X}_0}$ le plan affine tangent à $\mathcal{S}$ en $\vec{X}_0$.

a. Écrire l'équation cartésienne de $\mathcal{P}_{\vec{X}_0}$ (on munit R^3 du repère affine $\mathcal{R}_0$).

b. Vérifier que $\mathcal{P}_{\vec{X}_0}$ est l'ensemble des éléments $\vec{X} = (x, y, z)$ de R^3 tels que $D_{X_0}(\vec{X}) = D_{X_0}(\vec{X}_0)$.

Montrer que si $M \in G$ alors $\mathcal{P}_{\widehat{M(\vec{X}_0)}} = \hat{M}(\mathcal{P}_{\vec{X}_0})$.

4° Soit $\mathcal{P}$ le plan affine de R^3 d'équation $x = 1$. Décrire géométriquement $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$.

5° Soit $\vec{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un élément de $\mathcal{S}$.

a. Montrer que $\mathcal{P}_{\vec{X}_0} \cap \mathcal{S}$ se compose de deux droites affines distinctes contenant (x_0, y_0, z_0).

b. Existe-t-il d'autres droites affines de R^3 contenues dans $\mathcal{S}$ et contenant (x_0, y_0, z_0) que celles obtenues au *a* ?

6° Pour $u \in R$ on note V_u le sous-espace vectoriel de R^3 engendré par $\vec{e_1}$ et $\vec{X}_u = \cos u \, \vec{e_2} + \sin u \, \vec{e_3}$.

Discuter en fonction de u la nature géométrique de $\mathcal{S} \cap V_u$.

7° Soient $\vec{A}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{A}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ deux éléments de R^3. On considère l'arc paramétré affine Γ trajectoire de $\vec{P}(t) = \vec{e_1} + t\vec{A}_1 + t^2\vec{A}_2$ et on suppose que $\vec{P}(t) \in \mathcal{S}$ pour tout réel t.

a. Montrer que $a_1 = 0$ et que $a_2 \leqslant 0$.

b. Montrer que $-\vec{e_1} \notin \Gamma$.

8° Étudier l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan affine W d'équation cartésienne $x - z = 1$.

9° Soit $\vec{X} = (x, y, z)$ un élément de $\mathcal{S}$ distinct de $\vec{e_1}$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes

(1) $x \leqslant 1$ et $\vec{X} \neq -\vec{e_1}$

(2) Il existe un triplet $(\vec{A}_0, \vec{A}_1, \vec{A}_2)$ d'éléments de R^3 tel que la trajectoire Γ de $\vec{P}(t) = \vec{A}_0 + t\vec{A}_1 + t^2\vec{A}_2$ soit entièrement contenue dans $\mathcal{S}$ et contienne à la fois $\vec{e_1}$ et $\vec{X}$.

Interpréter géométriquement ce résultat en distinguant les cas $x = 1$ et $x < 1$.

10° On pose $\vec{Y}_1 = (0, 7/2, -1/2)$, $\vec{Y}_2 = (-6, -1/2, -9/2)$, $\vec{Y}_3 = (4, -3, 5)$ et on considère l'application

$$t \to \vec{L}(t) = \vec{e_1} + t\vec{Y}_1 + t^2\vec{Y}_2 + t^3\vec{Y}_3$$

Déterminer l'ensemble des réels t tels que $\vec{L}(t)$ appartienne à $\mathcal{S}$. Calculer $\vec{L}(1)$ et $\vec{L}(0)$.

11° Soient $\vec{X}_0$ et $\vec{X}_1$ deux éléments distincts quelconques de $\mathcal{S}$.

Montrer qu'il existe un quadruplet $(\vec{A}_0, \vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3)$ d'éléments de R^3 tels que si on pose $\vec{Q}(t) = \vec{A}_0 + t\vec{A}_1 + t^2\vec{A}_2 + t^3\vec{A}_3$ pour $t \in R$ on ait les propriétés suivantes :

(1) $\forall t \in R$, $\vec{Q}(t) \in \mathcal{S}$ (2) $\vec{Q}(0) = \vec{X}_0$ et $\vec{Q}(1) = \vec{X}_1$

FIN